Ex.23　解: 设λ 为矩阵A 的特征值, x 为对应的特征向量, 则

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (\alpha\alpha^T)x = \lambda x, \text{ 即 } (\alpha^T x)\alpha = \lambda x.$$

下面分情况讨论.

(1) $\alpha^T x = 0$.

则由于特征向量是非零向量, 故$\lambda = 0$. 解齐次线性方程组$\alpha^T x = 0$, 即求解

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

由条件$a_1 \neq 0$ 得

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n.$$

自由变量$x_2, x_3, \cdots, x_n$ 如下取值

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

那么, 齐次线性方程组$\alpha^T x = 0$ 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是, 属于特征值0 的任意特征向量可表示为

$$k_1\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_{n-1}\begin{pmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中, $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 是任意实数.

(2) $\alpha^T x \neq 0$, 这表明向量α 与向量x 共线, 因此, 特征向量$x = \alpha$, 对应的特征值$\lambda = \alpha^T\alpha$.